AN 12

École normale supérieure de Cachan

Option P′

6643 *Les fonctions considérées ici sont supposées continues de la variable réelle et à valeurs complexes.*

PARTIE A.

Si f est une fonction de période $T > 0$ *,on note* $C_n^T(f)$ *la quantité égale à*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,e^{-(2i\pi/T)nx}\,dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

1° Soit f et g deux fonctions de période $T > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad C_n^T(f) = C_n^T(g).$$

Montrer que $\displaystyle\int_0^T |f(x) - g(x)|^2\,dx = 0$ et en déduire que $f = g$.

2° Soit f une fonction de période T telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n^T(f)| < +\infty$

Déduire du **1°** que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T(f)\,e^{(2i\pi/T)nx}.$$

On considère maintenant une fonction θ *telle qu'il existe* $\alpha > 0$ *pour lequel la fonction* $x \to |x|^{1+\alpha}|\theta(x)|$ *est bornée.*

Soit $T > 0$:

3° Soit $A > 0$. Montrer que pour $|n| > \frac{A}{T}$ et $|x| \leq A$ on a

$$|x + nT| \geq |n|T - A.$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la « série » $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x + nT)$ est absolument convergente et définit une fonction continue de la variable x, de période T, qu'on notera θ_σ^T et qui s'appelle la T-*périodisée* de θ.

4° On considère, pour $\upsilon \in \mathbb{R}$ fixé, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\,e^{-i\upsilon x}\,dx$.

a) Montrer que cette intégrale est absolument convergente. *On notera* $\hat{\theta}(\upsilon)$ *sa valeur.*

b) Montrer que la fonction $\hat{\theta}$ ainsi définie est continue. *($\hat{\theta}$ s'appelle la transformée de Fourier de θ.)*

c) Montrer que $C_n^T\left(\theta_\sigma^T\right) = \frac{1}{T}\hat{\theta}(2\pi n/T)$.

On suppose de plus qu'il existe $\beta > 0$ *tel que la fonction* $\upsilon \to |\upsilon|^{1+\beta}|\hat{\theta}(\upsilon)|$ *est bornée.*

5° Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}(2\pi n/T)\, e^{(2i\pi/T)nx}$.

(Ce résultat est appelé la formule de Poisson.)

6° Si A est un réel > 0, on note $N_T(A) = \{n \in \mathbb{Z}, |2\pi n/T| \leq A\}$.

a) Montrer que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n\in N_T(A)} \hat{\theta}(2\pi n/T)\, e^{(2i\pi/T)nx} = (1/2\pi)\int_{-A}^{A} \hat{\theta}(\upsilon)\, e^{i\upsilon x}\, d\upsilon$$

b) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{T}\sum_{n\notin N_T(A)} |\hat{\theta}(2\pi n/T)| \leq c\,|A - 2\pi|^{-\beta}, \text{ pour } T \geq 1 \text{ et } A > 2\pi.$$

c) Déduire de *a)* et *b)* que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}(2\pi n/T)\, e^{(2i\pi/T)nx} = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\upsilon)\, e^{i\upsilon x}\, d\upsilon.$$

d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\quad \theta(x) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\upsilon)\, e^{i\upsilon x}\, d\upsilon$

(Cette formule s'appelle la formule de réciprocité de Fourier.)

PARTIE B.

Les fonctions θ *et* $\hat{\theta}$ *restent soumises aux hypothèses de la partie précédente. On suppose de plus que* $\theta(0) = 1$.

On considère une fonction f continue et 2π*-périodique. On pose* $C_n(f) = C_n^{2\pi}(f)\ (n \in \mathbb{Z})$.

1° Soit $t > 0$.

a) Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n(f)|\,|\theta(nt)| < +\infty$.

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ la « série » $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f)\, e^{inx}\theta(nt)$

définit une fonction continue de la variable x, que l'on notera $\varphi_t(x)$.

2° *On pose, pour t* > 0 et $u \in \mathbb{R}$, $K_t(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inu}\theta(nt)$.

En appliquant la formule de Poisson à la fonction ψ définie par $\psi(x) = e^{i(u/t)x}\theta(x)$ (u et t fixés), montrer que $K_t(u) = \frac{1}{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}((2\pi n - u)/t)$.

On pose $\Phi_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} \theta(nt)$.

3° Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Phi_t(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x-u) K_t(u)\, du$.

4° En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Phi_t(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\upsilon t) \hat{\theta}(\upsilon)\, d\upsilon$.

5° Montrer que $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\upsilon)\, d\upsilon = 1$.

6° En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{t \to 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} \theta(nt) = f(x)$$

et que cette convergence est uniforme en x.

PARTIE C.

La fonction f est toujours une fonction continue 2 π-périodique.

Application 1.

Montrer que $\lim_{r \to 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} r^{|n|} = f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

(Procédé de sommation de Poisson)

Application 2.

On pose $\theta(x) = e^{-x^2}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = (\pi)^{1/2}$.

1° Montrer que $\hat{\theta}$ vérifie une équation différentielle du premier ordre et en déduire $\hat{\theta}$.

2° Montrer que $\lim_{t \to 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} e^{-n^2 t^2} = f(x)$.

(Procédé de sommation de Weierstrass)

A.1 La formule de Parseval - Bessel permet d'écrire :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n^T(f-g)| = \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)-g(x)|^2\,dx$$

Comme $C_n^T(f-g) = C_n^T(f) - C_n^T(g) = 0$ pour tout n, cela entraine :

$$\int_0^T |f(x)-g(x)|^2\,dx = 0$$

La fonction $x \longmapsto |f(x)-g(x)|^2$ étant continue positive, ceci exige que $f-g=0$ sur $[0,T]$. Enfin, f et g étant périodiques de période T, cela entraine $f=g$ sur tout $\mathbb{R}$.

A.2

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T(f)\, e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ converge normalement, donc uniformément, vers une fonction continue (comme limite uniforme de fonctions continues) g, puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n^T(f)| < +\infty$.

Vu la convergence uniforme de la série $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T(f)e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$, on aura :

$$\int_0^T g(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}px}\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T(f)\int_0^T e^{i\frac{2\pi}{T}(n-p)x}\,dx$$

$$= T\, C_p^T(f)$$

d'où $C_p^T(g) = C_p^T(f)$

A.1 s'applique et entraine :

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x) = g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T(f)\, e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

NB : Ainsi la série de Fourier d'une fonction continue f telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n^T(f)| < +\infty$, converge uniformément vers f. Rappelons que le Th. de Dirichlet assure cette convergence uniforme lorsque f est continue et de classe C^1 par morceaux.

A.3

* Si $|n| > \frac{A}{T}$ et $|x| \leq A$, on a :

$$|x+nT| \geq |nT| - |x| \geq |n|T - A$$

* Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x|^{1+\alpha} |\theta(x)| \leq M$$

Pour $|n| > \frac{A}{T}$ et $|x| \leq A$, on aura :

$$|\theta(x+nT)| \leq \frac{M}{|x+nT|^{1+\alpha}} \leq \frac{M}{(|n|T-A)^{1+\alpha}} \qquad (*)$$

La série $\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>\frac{A}{T}}} \frac{M}{(|n|T-A)^{1+\alpha}}$ étant convergente, puisque $\frac{2M}{(nT-A)^{1+\alpha}} \sim \frac{2M}{n^{1+\alpha}}$

et $1+\alpha > 1$, $(*)$ montre la convergence uniforme de

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+nT)$ vers une fonction $\theta_\sigma^T(x)$ sur l'intervalle $[-A, A]$

θ_σ^T sera continue sur $[-A,A]$ comme limite de fcts continues, et comme $A>0$ peut-être choisi quelconque, on a prouvé que :

1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+nT)$ converge absolument vers θ_σ^T sur $\mathbb{R}$,

2) Cette convergence est uniforme sur tout intervalle $[-A,A]$ où $A \in \mathbb{R}$,

De plus, il est clair que θ_σ^T est T-périodique.

A.4.a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)|\,dx \leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{M}{|x|^{1+\alpha}}\,dx + \int_{-1}^{1} |\theta(x)|\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{M}{|x|^{1+\alpha}}\,dx$$

La convergence de $\int |\theta(x)|\,dx$ se déduit de celles des 2 intégrales généralisées du membre de droite, par ailleurs assurées puisque $1+\alpha > 1$.

On peut poser :

$$\forall v \in \mathbb{R} \qquad \hat{\theta}(v) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\, e^{-ivx}\,dx$$

(avec une intégrale absolument convergente au second membre).

A.4.b

1re solution :

* Idée : $|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| = \left| \int \theta(x) \left(e^{-ivx} - e^{-iwx}\right) dx \right|$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)| \underbrace{\left| e^{-ivx} - e^{-iwx} \right|}\,dx \qquad (*)$$

$$= \left|1 - e^{i(v-w)x}\right| = \left| e^{-i\frac{v-w}{2}x} - e^{i\frac{v-w}{2}x} \right|$$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{v-w}{2}x\right)\right|$$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)|\,dx$ converge, donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $A > 0$ tq

$$\int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)| + \int_{A}^{+\infty} |\theta(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

(*) permet d'écrire :

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta(x)| \cdot 2\left|\sin\left(\frac{v-w}{2}x\right)\right| dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^{A} + \int_{A}^{+\infty} \leq 2\int_{-\infty}^{-A} |\theta|\,dx + 2\int_{-A}^{A} |\theta| \left|\sin \frac{v-w}{2}x\right| dx + 2\int_{A}^{+\infty} |\theta|$$

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\int_{-A}^{A} |\theta(x)| \left|\sin\left(\frac{v-w}{2}x\right)\right| dx$$

θ est continue et vérifie $|\theta(x)| \leqslant \frac{M}{|x|^{1+\alpha}}$ pour tout $x \neq 0$, donc $Cte \doteq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\theta(x)|$ existe, et comme $\left|\sin\left(\frac{v-w}{2}x\right)\right| \leqslant \left|\frac{v-w}{2}x\right|$, on obtient :

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + Cte \int_{-A}^{A} |v-w|\,|x|\,dx$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2A^2 . Cte . |v-w|$$

$\leqslant \varepsilon$ pour $|v-w|$ suffisamment petit.

CQFD

<u>2 solution</u> : $\hat{\theta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, e^{-ivx}\, dx$

Pour $A>0$ fixé, $\hat{\theta}_A(v) \doteq \int_{-A}^{A} \theta(x) e^{-ivx} dx$ est une fonction continue en v. En effet, l'application :

$$[-A, A] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, v) \longmapsto \theta(x) e^{-ivx}$$

est continue et un Th. du Cours permet de conclure.

On a :

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}_A(v)| \leqslant \int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)| + \int_{A}^{+\infty} |\theta(x)| \qquad (*)$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta|$ convergeant, il existe A tq le second membre de $(*)$ soit $\leqslant \varepsilon/3$ pour <u>tout</u> $v \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$\exists A \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad |\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}_A(v)| \leq \varepsilon/3$

La continuité de $\hat{\theta}$ sur $\mathbb{R}$ s'en déduit. En effet, si v et $w \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| \leq \underbrace{|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}_A(v)|}_{\substack{\leq \varepsilon/3 \\ \text{si } A \text{ suffisamment grand}}} + \underbrace{|\hat{\theta}_A(v) - \hat{\theta}_A(w)|}_{\substack{\leq \varepsilon/3 \\ \text{si } |v-w|<\eta}} + \underbrace{|\hat{\theta}_A(w) - \hat{\theta}(w)|}_{\substack{\leq \varepsilon/3 \\ \text{si } A \text{ suff. grand}}}$$

NB : Autre façon de conclure à partir de (*) : (*) montre que $\hat{\theta}$ est la limite uniforme de la famille de fonctions continues $\hat{\theta}_A$ quand A tend vers $+\infty$. Donc $\hat{\theta}$ sera continue comme limite uniforme de fonctions continues !

A.4.c

$$c_n^T(\theta_\sigma^T) \doteq \frac{1}{T}\int_0^T \theta_\sigma^T(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta(x+kT)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

La série convergeant uniformément sur $[0,T]$ d'après A.3, on peut écrire :

$$c_n^T(\theta_\sigma^T) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^T \theta(x+kT)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}\,dx$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{kT}^{(k+1)T} \theta(y)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}ny}\,dy$$

$$= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} \theta(y)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}ny}\,dy$$

$$= \frac{1}{T}\,\hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T}n\right)$$

A.5

On a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(x+nT) \doteq \theta_\sigma^T(x)$, donc tout consiste à montrer :

$$\theta_\sigma^T(x) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T}n\right) e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

soit encore $\theta_\sigma^T(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^T(\theta_\sigma^T)\, e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ d'après A.4.c

Cette dernière égalité est vérifiée car θ_σ^T est T-périodique et car $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n^T(\theta_\sigma^T)| < +\infty$ (voir lemme ci-dessous), ce qui nous permet d'utiliser A.2. CQFD

Lemme : $\sum |c_n^T(\theta_\sigma^T)| < +\infty$

preuve : En notant $K = \sup_{v\in\mathbb{R}} |v|^{1+\beta}|\hat{\theta}(v)|$, on a :

$$|c_n^T(\theta_\sigma^T)| = \frac{1}{T}\left|\hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T}n\right)\right| \leq \frac{1}{T}\cdot\frac{K}{\left|\frac{2\pi}{T}n\right|^{1+\beta}} = \frac{KT^\beta}{(2\pi)^{1+\beta}}\cdot\frac{1}{|n|^{1+\beta}}$$

et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{1+\beta}}$ converge (puisque $1+\beta>1$).

CQFD

A.6.a Soit $N_T = E\left(\frac{AT}{2\pi}\right)$. Posons $f(t) = \hat{\theta}(2\pi t)\, e^{i2\pi t x}$ et :

$$S_T \doteq \frac{1}{T} \sum_{n \in N_T(A)} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T} n\right) e^{i \frac{2\pi}{T} n x} = \frac{1}{T} \sum_{n=-N_T}^{N_T} f\left(\frac{n}{T}\right)$$

Comme $\int_{-A}^{A} \hat{\theta}(v) e^{ivx}\, dv = 2\pi \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} \hat{\theta}(2\pi t) e^{i2\pi t x}\, dt = 2\pi \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t)\, dt$,

il suffira de prouver les 2 résultats suivant pour conclure :

$$\begin{cases} ① & \lim_{T \to +\infty} S_T = \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\, dt \\ ② & \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\, dt = \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t)\, dt \end{cases}$$

② est trivial car $\lim_{T \to +\infty} \frac{N_T}{T} = \lim \frac{1}{T} E\left(\frac{AT}{2\pi}\right) = \frac{A}{2\pi}$ entraîne

$$\lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\, dt = \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t)\, dt$$

Montrons ① :

$$S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\, dt = \frac{1}{T} \sum_{n=-N_T} f\left(\frac{n}{T}\right) - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot f\left(\frac{N_T}{T}\right) + \sum_{n=-N_T}^{N_T - 1} \left[\frac{1}{T} f\left(\frac{n}{T}\right) - \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} f(t)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} f\left(\frac{N_T}{T}\right) + \sum_{n=-N_T}^{N_T - 1} \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} f\left(\frac{n}{T}\right) - f(t)\, dt \qquad (*)$$

donc

$$\left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{T} \left|f\left(\frac{N_T}{T}\right)\right| + \sum_{n=-N_T}^{N_T-1} \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} \left|f\left(\tfrac{n}{T}\right) - f(t)\right| dt$$

f est continue sur $[-A, A]$, donc uniformément continue, et :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \qquad \left.\begin{matrix} |t-t'| < \eta \\ t, t' \in [-A, A] \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \varepsilon$$

Si $\frac{1}{T} < \eta$, l'inégalité ci-dessus entraine :

$$\left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{T} \left|f\left(\frac{N_T}{T}\right)\right| + \frac{2N_T}{T}\,\varepsilon$$

or $0 \leq \frac{N_T}{T} = \frac{1}{T} E\left(\frac{AT}{2\pi}\right) < \frac{A}{2\pi}$, donc en notant $K = \underset{t \in [-A, A]}{\mathrm{Max}}\, f(t)$,

on obtient :

$$\left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\,dt \right| \leq \frac{K}{T} + \frac{A}{\pi} \cdot \varepsilon$$

dès que $T > \frac{1}{\eta}$.

<u>Ce qui prouve (1)</u>

(Vraiment : si $\varepsilon' > 0$ est donné, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{\pi}{2A} \cdot \varepsilon'$, de construire η, et de choisir $T_0 > \frac{1}{\eta}$ suffisamment grand pour que $\frac{K}{T_0} < \frac{\varepsilon'}{2}$ pour être assuré (vu (*)) d'avoir :

$$T > T_0 \Rightarrow \left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t)\,dt \right| < \varepsilon' \quad)$$

A.6.b

Notons $N_T = E\left(\frac{AT}{2\pi}\right)$. On a $N_T(A) = \mathbb{Z} \setminus [-N_T, N_T]$.

$$\frac{1}{T}\sum_{n\notin N_T(A)} \left|\hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right| \leq \frac{1}{T}\sum \frac{S}{\left|\frac{2\pi n}{T}\right|^{1+\beta}}$$ où S est une cte

$$\leq S' T^{\beta} \sum_{n\notin N_T(A)} \frac{1}{|n|^{1+\beta}}$$

<u>lemme</u> : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} = O\left(\frac{1}{N^\beta}\right)$ (où $\beta>0$)

preuve : comparaison avec l'intégrale

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\beta}}\,dt = \frac{1}{\beta N^\beta}$$

$1/t^{1+\beta}$

N N+1

NB : en fait, cette comparaison avec l'intégrale est encore plus fructueuse car nous permet d'écrire

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\beta}}\,dt \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} \doteq S(N) \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\beta}}\,dt$$

$$\frac{1}{\beta(N+1)^\beta} \leq S(N) \leq \frac{1}{\beta N^\beta}$$

$$\underbrace{\frac{N^\beta}{(N+1)^\beta}}_{\to 1\ (N\to+\infty)} \leq \frac{S(N)}{\frac{1}{\beta N^\beta}} \leq 1$$

et prouve que $S(N) \sim \dfrac{1}{\beta N^\beta}$ $(N\to+\infty)$.

CQFD

On déduit

$$\frac{1}{T}\sum_{n\notin N_T(A)} \left|\hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right| \leq S'' \frac{T^\beta}{N_T^\beta} = S''\left(\frac{N_T}{T}\right)^{-\beta} \qquad (*)$$

mais $N_T \leq \frac{AT}{2\pi} < N_T + 1 \Rightarrow \frac{N_T}{T} \leq \frac{A}{2\pi} < \frac{N_T}{T} + \frac{1}{T} \leq \frac{N_T}{T} + 1$

car $\begin{cases} T \geq 1 \\ A > 2\pi \end{cases}$. Par suite

$$\frac{A}{2\pi} - 1 \leq \frac{N_T}{T} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{N_T}{T}\right)^{-\beta} \leq \left(\frac{A}{2\pi} - 1\right)^{-\beta}$$

et $(*)$ implique l'existence de $c>0$ tel que

$$\frac{1}{T}\sum_{n\notin N_T(A)} \left|\hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right| \leq c\,|A - 2\pi|^{-\beta}$$

CQFD

A.6.c

$$\left|\frac{1}{T}\sum \underbrace{\hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi}{T}nx}}_{\doteq\, \xi} - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(v)\, e^{ivx}\, dv\right| \qquad (*)$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{n\notin N_T(A)} |\xi|}_{\doteq\, S_1} + \underbrace{\left|\frac{1}{T}\sum_{n\in N_T(A)} \xi - \frac{1}{2T}\int_{-A}^{A} \hat{\theta}(v)\, e^{ivx}\, dv\right|}_{\doteq\, S_2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-A} |\hat{\theta}(v)|\,dv + \int_{A}^{+\infty} |\hat{\theta}(v)|\,dv}_{\doteq\, S_3}$$

Soit $\varepsilon>0$. Prenons $A>2\pi$ et $T>1$.

A.6.b entraine $S_1 \leq c\,|A-2\pi|^{-\beta}$, et comme $\lim_{A\to+\infty} |A-2\pi|^{-\beta} = 0$, il existe A_0 tel que $A > A_0 \Rightarrow c\,|A-2\pi|^{-\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3}$

A.6.a entraine l'existence de T_0 / $T > T_0 \Rightarrow S_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Enfin $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\theta}(v)|\,dv$ converge (A.4.a) donc $S_3 \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour $A \geq A_1$.

Finalement, pour $A > \mathrm{Sup}(2\pi, A_0, A_1)$ et $T > \mathrm{Sup}(1, T_0)$, le 1er membre de $(*)$ est $\leq \varepsilon$.

CQFD

A.6.d

Compte tenu de A.6.c et A.5, tout revient à prouver que :

$$\theta(x) = \lim_{T \to +\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x + nT)$$

ou encore $\lim_{T \to +\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \theta(x + nT) = 0$ $(*)$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x+nT) \right| \leq \sum |\theta(x+nT)| \leq \sum \frac{K}{|x+nT|^{1+\alpha}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{(nT - |x|)^{1+\alpha}}$$

Pour $T > 2|x|$, on a $nT - |x| > nT - \frac{T}{2}$ donc :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x+nT) \right| \leq K \sum \frac{1}{\left(nT - \frac{T}{2}\right)^{1+\alpha}} = \underbrace{\frac{K}{T^{1+\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^{1+\alpha}}}_{\to 0 \quad (T \to +\infty)}$$

Cela prouve que $\lim_{T \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x+nT) = 0$. On prouverait de même que $\lim_{T \to +\infty} \sum_{n=-1}^{-\infty} \theta(x+nT) = 0$, ce qui achève la démonstration de $(*)$.

NB :

1) La formule de réciprocité de Fourier est, en fait, valable dans des conditions plus générales. Elle est vraie dès que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(\nu)|\, d\nu$ converge, par exemple.

2) La formule de réciprocité s'écrit aussi $\hat{\hat{\theta}}(x) = \theta(-x)$

B.1.a

$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$, donc :

$$|c_n(f)|\,|\theta(nt)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt \cdot \frac{K}{|nt|^{1+\alpha}} \quad \text{(où K est une cte)}$$

f étant continue et périodique sur $\mathbb{R}$, elle atteint son maximum $S = \underset{t\in\mathbb{R}}{\mathrm{Max}} |f(t)|$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$|c_n(f)|\,|\theta(nt)| \leq \frac{SK}{t^{1+\alpha}} \cdot \frac{1}{|n|^{1+\alpha}}$$

Comme $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^{1+\alpha}}$ converge, la série $\sum |c_n(f)|\,|\theta(nt)|$ sera convergente.

B.1.b

La série $f_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}\, \theta(nt)$ est uniformément convergente d'après B.1.a, puisque $|c_n(f)\, e^{inx}\, \theta(nt)| \leq |c_n(f)|\, \theta(nt)|$. $f_t(x)$ est donc la limite uniforme d'une suite de fonctions $x \mapsto c_n(f) e^{inx} \theta(nt)$ continues sur $\mathbb{R}$, donc <u>sera continue sur $\mathbb{R}$</u>.

B.2

Appliquons la formule de Poisson (*) à $\varphi(x) = e^{i\frac{u}{t}x}\, \theta(x)$ et pour $T = t$ et $x = 0$. On obtient :

$$K_t(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inu}\, \theta(nt) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(nt) = \frac{1}{t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{2\pi n}{t}\right)$$

Calculons $\hat{\varphi}\left(\frac{2\pi n}{t}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(v)\, e^{-iv\frac{2\pi n}{t}}\, dv$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \theta(v)\, e^{-iv\left(\frac{2\pi n}{t} - \frac{u}{t}\right)}\, dv$$

$$= \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{t} - \frac{u}{t}\right)$$

donc

$$\boxed{K_t(u) = \frac{1}{t}\sum \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{t} - \frac{u}{t}\right)}$$

(B) <u>Vérifions que ψ satisfait les 2 conditions faites sur θ dans la partie A</u> :

$\psi(x) = e^{i\frac{u}{t}x}\theta(x)$ donc $|x|^{1+\alpha}|\psi(x)| = |x|^{1+\alpha}|\theta(x)|$ est bornée par hypothèse

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\frac{u}{t}y}\theta(y)\, e^{-iyx}\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \theta(y)\, e^{-iy\left(x-\frac{u}{t}\right)}\, dy = \hat{\theta}\left(x - \frac{u}{t}\right)$$

donc

$$|x|^{1+\alpha}|\hat{\psi}(x)| = |x|^{1+\alpha}\left|\hat{\theta}\left(x - \frac{u}{t}\right)\right| \leq |x|^{1+\alpha}\cdot\frac{M}{\left|x - \frac{u}{t}\right|^{1+\alpha}}$$

pour $x \neq \frac{u}{t}$, via les hypothèses sur $\hat{\theta}$.

$x \mapsto |x|^{1+\alpha}|\hat{\psi}(x)|$ est donc bornée quand $x \to \pm\infty$, continue sur $\mathbb{R}$, et donc bien bornée sur tout $\mathbb{R}$.

CQFD

<u>NB</u> : On a utilisé (et redémontré) 2 fois la formule

$$\widehat{e^{i\alpha x}\cdot\theta(x)} = \hat{\theta}(x-\alpha)$$

B.3

$$J \doteq \int_0^{2\pi} f(x-u) K_t(u)\, du = \int_0^{2\pi} f(x-u) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inu}\, \theta(nt)\, du$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inu}\, \theta(nt)\, f(x-u)$ est normalement convergente puisque $u \mapsto f(x-u)$ est continue, donc $|f(x-u)|$ est bornée sur $[0, 2\pi]$, et puisque $|\theta(nt)| \leq \frac{Cte}{|nt|^{1+\alpha}}$ par hypothèse.

Ainsi :

$$J = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(nt) \int_0^{2\pi} e^{inu} f(\underbrace{x-u}_{v})\, du$$

$$= \sum \theta(nt) \int_x^{x-2\pi} e^{in(x-v)} f(v)\, (-dv)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta(nt)\, e^{inx} \int_0^{2\pi} f(v)\, e^{-inv}\, dv$$

$$= \sum \theta(nt)\, e^{inx} \,.\, 2\pi\, c_n(f)$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u) K_t(u)\, du = \Phi_t(x)$$

B.4 On a (B.2) :

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n - u}{t}\right) f(x-u)\, du \qquad (*)$$

Si $u \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\left| \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n - u}{t}\right) f(x-u) \right| \leq \frac{K.\, t^{1+\beta}}{(2\pi n - u)^{1+\beta}} \sup_{u\in[0,2\pi]} |x-u| \leq \frac{K t^{1+\beta}}{(2\pi n - 2\pi)^{1+\beta}} \sup |x-u|$$

et cette dernière série converge.

La série figurant en $(*)$ converge donc normalement et l'on peut intervertir $\int_0^{2\pi}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n - u}{t}\right) f(x-u)\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_{2\pi n}^{2\pi(n-1)} \hat{\theta}\left(\frac{v}{t}\right) f(x+v)(-dv)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}\left(\frac{v}{t}\right) f(x+v)\, dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(w)\, f(x+wt)\, dw$$

B.5 La formule de réciprocité de Fourier (A.6.d) donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(v)\, dv = \theta(0) = 1$$

B.6 D'après B.4 et B.5 :

$$\Phi_t(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(x+vt) - f(x))\, \hat{\theta}(v)\, dv$$

$\int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(v)$ converge. Soit $\varepsilon > 0$, il existe A tq

$$\int_{-\infty}^{A} |\hat{\theta}(v)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{A}^{+\infty} |\hat{\theta}(v)| < \varepsilon$$

f est périodique et continue, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Notons $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

$$|\Phi_t(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-A} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} + \frac{1}{2\pi} \int_{A}^{+\infty}$$

$$\leq \frac{\varepsilon M}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} |f(x-vt) - f(x)|\, \hat{\theta}(v)\, dv + \frac{\varepsilon M}{\pi} \qquad (*)$$

L'uniforme continuité de f permet d'écrire :

$$\exists \eta \qquad |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{A}$$

donc

$$|vt| < \eta \Rightarrow |f(x+vt) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{A}$$

Si $v \in [-A, A]$, $|vt| \leq At$ sera $< \eta$ dès que $t < \frac{\eta}{A}$,
et donc :

$$t < \frac{\eta}{A} \Rightarrow |f(x+vt) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{A}$$

$(*)$ entraîne alors :

$$|\Phi_t(x) - f(x)| \leq \frac{2M}{\pi} \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \cdot 2A \cdot C \cdot \frac{\varepsilon}{A} \qquad \text{où } C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{\theta}(x)|$$

soit :

$$t < \frac{\eta}{A} \Rightarrow |\Phi_t(x) - f(x)| \leq \left(\frac{2M}{\pi} + \frac{C}{\pi}\right)\varepsilon$$

ce qui prouve $\lim_{t \to 0_+} \Phi_t(x) = f(x)$ avec une convergence uniforme en x (car η ne dépend pas de x mais seulement de f et de ε)

C. Application 1

On applique B.6 avec $\theta(t) = e^{-|t|}$, en notant :

$$\theta(nt) = e^{-|nt|} = (e^{-t})^{|n|} = r^{|n|}$$

si $r = e^{-t}$. On a bien $\lim_{t \to 0_+} r = 1_-$.

Vérifions que θ satisfait les conditions du A. :

$\lim_{t \to \pm\infty} \theta(t)\,|t|^{1+\alpha} = 0$ pour tout $\alpha > 0$

D'autre part $\hat{\theta}(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-itv} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-itv} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-itv} dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{itv} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-itv} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t}\, 2\cos vt \, dt$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-itv} dt\right)$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+iv}\right) = \frac{1}{1+v^2}$$

prouve que $v \mapsto |v|^2\,\hat{\theta}(v)$ est bornée. CQFD

Application 2 :

C.1

$\theta(x) = e^{-x^2}$. Alors $|x|^{1+\alpha} e^{-x^2}$ est bornée pour tout $\alpha > 0$, et :

$$\hat{\theta}(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ivx} \, dx$$

* Supposons que nous puissions dériver sous le signe somme :

$$\hat{\theta}'(v) = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} e^{-ivx} \, dx$$

Par intégration par parties :

$$\hat{\theta}'(v) = -i \left(\left[\frac{e^{-x^2}}{-2} \cdot e^{-ivx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{-2} \cdot (-iv) e^{-ivx} \, dx \right)$$

$$\hat{\theta}'(v) = -\frac{v}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ivx} \, dx$$

$$\hat{\theta}'(v) = -\frac{v}{2} \hat{\theta}(v)$$

et $\hat{\theta}$ vérifie l'équation différentielle $y' = -\frac{t}{2} y$ que l'on résout en séparant les variables :

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{t}{2} dt$$

$$\ln|y| = -\frac{t^2}{4} + \text{cte}$$

$$y = a e^{-\frac{t^2}{4}}$$

$\hat{\theta}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, donc $\boxed{\hat{\theta}(v) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{v^2}{4}}}$

* Montrons que l'on peut dériver $\hat{f}(v)$ sous le signe $\int$:

1ère solution : on utilise le Th. de dérivabilité de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x,t)\,dt$ (Ramis IV.2.3)

Rappel :

Th : $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ où $x \in I$, I intervalle de $\mathbb{R}$.

Si 1) $f(x,t)$ continue en (x,t)

2) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en (x,t)

3) $\int_a^{+\infty} f(x,t)\,dt$ est simplement convergente (la moindre des choses !)

4) $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ est uniformément convergente

Alors $F(x)$ est dérivable sur I et $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Ici $\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ivx}\,dx$. Les points 1), 2), 3) sont trivialement vérifiés, et nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-x^2} e^{-ivx}\right) = -ix\, e^{-x^2} e^{-ivx}$$

d'où $\left|\frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-x^2} e^{-ivx}\right)\right| \leq x\, e^{-x^2}$ avec $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2}\,dx$ qui converge.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-x^2} e^{-ivx}\right)dx$ est donc normalement convergente, donc aussi uniformément convergente. CQFD

2° solution : on se ramène au Théorèmes plus classiques concernant la dérivation de $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ où $[a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$.

On a
$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-ivx}\,dx$$

Posons
$$F_n(v) = \int_{-n}^{n} e^{-x^2} e^{-ivx}\,dx$$

L'application $(v,x) \longmapsto e^{-x^2} e^{-ivx}$ étant de classe C^1, le Théorème classique de dérivation des fonctions exprimées à l'aide d'une intégrale prouve que F_n est de classe C^1 et

$$F_n'(v) = \int_{-n}^{n} \frac{\partial}{\partial v}\left(e^{-x^2} e^{-ivx}\right) dx$$

$$F_n'(v) = -i \int_{-n}^{n} x\, e^{-x^2} e^{-ivx}\,dx$$

Si l'on calcule :

$$\left| F_n'(v) + i \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2} e^{-ivx}\,dx \right| \leqslant 2 \int_{n}^{+\infty} x\, e^{-x^2}\,dx$$

et le 2° membre tend vers 0 indépendamment de v quand $n \to +\infty$.
Ainsi, la suite $(F_n'(v))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $v \longmapsto \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-x^2} e^{-ivx}\,dx$, et le Théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions prouve que $\hat{f} = \lim_{n \to +\infty} F_n$ est de classe C^1 et $\hat{f}'(v) = \lim_{n \to +\infty} F_n'(v) = -i \int_{\mathbb{R}} x\, e^{-x^2} e^{-ivx}\,dx$.

CQFD

C.2 On applique B.6 :

$$\lim_{t \to 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} e^{-n^2 t^2} = f(x) .$$

FIN